5. Tutorium

Sonntag, 21. November 2021 23:17

## 1.) Zeitentwicklung in der Quantenmechanik

· vollständig beschrieben durch SGL: $i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle$

1.) Die Wahrscheinlichkeit ist zeitlich erhalten: $\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\Psi(x)\rangle = \left(\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\right)|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|\left(\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle\right)$$

SGL: $\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H(t)|\Psi(t)\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)| = +\frac{i}{\hbar}H^{\dagger}(t)\langle\Psi(t)|$ mit $H = H^{\dagger}$

$$= \frac{i}{\hbar}H(t)\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar}H(t)\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$ //

2.) Zeitentwicklungsoperator $U(t,t_0)$:

→ es existiert ein Operator $U(t,t_0)$ : $|\Psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle$

→ Erwartungswert $\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t_0)|\underbrace{U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)}_{=\mathbb{1}}|\Psi(t_0)\rangle \overset{\text{nach 1)}}{=} \langle\Psi(t_0)|\Psi(t_0)\rangle$

$\Rightarrow U(t,t_0)$ ist unitär $U^{\dagger}U = \mathbb{1}$

$$|\Psi(t_0)\rangle \to |\Psi(t_1)\rangle \to |\Psi(t_2)\rangle = \begin{cases} U(t_2,t_1)|\Psi_1(t)\rangle = U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \\ U(t_2,t_0)|\Psi_0(t)\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)$$

$$|\Psi(t_0)\rangle \to |\Psi(t_1)\rangle \to |\Psi(t_0)\rangle = \begin{cases} U(t_0,t_1)|\Psi_1(t)\rangle = U(t_0,t_1)U(t_1,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \\ \mathbb{1}|\Psi_0(t)\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow U^{\dagger}(t_0,t_1) = U(t_1,t_0)$$

Darstellung von $U(t,t_0)$: mit $\hat{H}(t) = \hat{H}$ zeitunabhängig

$$\Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0)\cancel{|\Psi(t_0)\rangle} = H\,U(t,t_0)\cancel{|\Psi(t_0)\rangle}$$

DGL 1. Ordnung

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} U(t,t_0) = -\frac{iH}{\hbar} U(t,t_0) \qquad \boxed{U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}} \qquad \text{mit } U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$$

unitär! (längentreu)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)^n$$

mit zeitabhängigem $\hat{H}(t)$ $\quad \frac{d}{dt} U(t,t_0) = \frac{1}{i\hbar} H(t)\, U(t,t_0) \qquad \int \dots dt'$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt'} U(t',t_0)\, dt'}_{U(t,t_0) - U(t_0,t_0)^{\,= \mathbb{1}}} = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} H(t')\, U(t',t_0)\, dt'$$

$$\Rightarrow \boxed{U(t,t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} H(t')\, U(t',t_0)\, dt'}$$

$$\hookrightarrow \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t'} H(t'')\, U(t'',t_0)\, dt'' \qquad t'' < t'$$

$$\hookrightarrow \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{U(t,t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \;\; H(t_1) \dots H(t_n)}$$

↳ Dyson-Reihe ↗ wichtig in der zeitabhängigen Störungsrechnung

## Zeitentwicklung des Erwartungswertes

$$\langle \hat{A} \rangle (t) = \langle \psi(t) | \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle \qquad \text{hier: } \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)|\right)}_{+i\hbar\, \hat{H}^{+}(t) \langle \psi(t)|} \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{A}(t) \underbrace{\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle}_{-i\hbar\, H(t) | \psi(t) \rangle} + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right\rangle$$

$$= i\hbar \langle \psi(t) | \hat{H}(t) \hat{A}(t) - \hat{H}(t) \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right\rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{\hbar} \left\langle \left[ \hat{H}(t), \hat{A}(t) \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \right\rangle}$$

zeitliche Entwicklung ⇔ Kommutator mit dem Hamilton-Operator

## Ehrenfest - Theorem

Teilchen in skalarem Potential $V(\hat{r})$

$$\hat{H}(\hat{r},\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{r}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\underbrace{[\hat{H},\hat{r}]}\rangle = \frac{i}{\hbar}\left(-i\frac{\hbar}{m}\langle\hat{p}\rangle\right) = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m} \qquad (\mathrm{I})$$

$$= \frac{1}{2m}[\hat{p}^2,\hat{r}] + \underbrace{[V(\hat{r}),\hat{r}]}_{=0} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\underbrace{[\hat{p},\hat{r}]}_{-i\hbar} + \underbrace{[\hat{p},\hat{r}]}_{-i\hbar}\hat{p}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\underbrace{[\hat{H},\hat{p}]}\rangle$$

$$= \frac{1}{2m}\underbrace{[\hat{p}^2,\hat{p}]}_{=0} + \underbrace{[V(\hat{r}),\hat{p}]}_{=-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}V(\hat{r})}$$

$$= -\langle\vec{\nabla}V(\hat{r})\rangle \qquad (\mathrm{II})$$

NR: $[V(\hat{r}),\hat{p}]\,\Psi(\hat{r})$

$$= V(\hat{r})\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi(\hat{r}) - \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\left(V(\hat{r})\Psi(\hat{r})\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\left(\vec{\nabla}V(\hat{r})\right)\Psi(\hat{r})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{r}\rangle \overset{(I)}{=} \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = -\frac{1}{m}\langle\vec{\nabla}V(\hat{r})\rangle$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{r}\rangle = \underbrace{-\langle\vec{\nabla}V(\hat{r})\rangle}_{=\langle\vec{F}(\hat{r})\rangle}$$

Bewegungsgleichungen der Mittelwerte nahezu identisch zur klassischen Mechanik!